Федеральное государственное бюджетное
образовательное
учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный университет»

Направление «Физика»

Выпускная квалификационная работа

Вероятностные представления решений задачи Коши для некоторых эволюционных задач

Выполнил:

Студент бакалавриата ____________ Федяев И.П.

Научный руководитель,
д.ф.-м.н., профессор ____________ Смородина Н.В.

Рецензент,
д.ф.-м.н., профессор ____________ Белопольская Я.И.

г. Санкт-Петербург, 2018

Содержание

1. Введение 3
2. Точечные пуассоновские поля 3
3. Безгранично делимые случайные величины 6
4. Однородные процессы с независимыми приращениями 8
5. Представление решений эволюционных уравнений 11

Список литературы 15

1. Введение

Известно, что ряд эволюционных уравнений математической физики допускает вероятностное представление в виде математического ожидания функционала от некоторого случайного процесса.

Например, решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^d$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u,\ u(0,x) = \varphi(x)$$
допускает вероятностное представление
$$u(t,x) = \mathbb{E}\varphi(x + w(t)),$$
где $w(t)$ - стандартный $d-$мерный винеровский процесс.

В настоящей работе мы рассматриваем другой тип эволюционных уравнений, в правой части которого содержится некоторый интегрально-разностный оператор. Для вероятностного представления решения задачи Коши для таких уравнений требуется уже более сложные случайные процессы с независимыми приращениями. Сложность их заключаются в том, что плотности одномерных распределений не выражаются через элементарные функции. Для таких процессов в работе строится представление в виде стохастического интеграла по некоторому пуассоновскому случайному полю. Также строится аппроксимация произвольных процессов с независимыми приращениями процессами с конечной спектральной мерой. Математические ожидания функционалов от таких процессов также являются решениями некоторых уравнений. Доказана теорема о сходимости решений допредельных уравнений к решению предельного уравнения.

2. Точечные пуассоновские поля

Пусть G — множество, $\mathcal{B}$ — $\sigma-$алгебра его подмножеств, Π – конечная мера на $(G, \mathcal{B})$. Пусть $\varkappa$ - случайная величина, имеющая пуассоновское распределение с параметром $\Pi(G)$. Рассмотрим случайное подмножество $X = \{x_j\}_{j=1}^{\varkappa} \subset G$, точки которого независимы и имеют распределение $\mathbf{P}(\cdot) = \frac{\Pi(\cdot)}{\Pi(G)}$. Случайное подмножество X будем называть точечным пуассоновским полем. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *1. Для любого измеримого $A \subset G$ величина $N(A) = \#\left\{X \cap A\right\}$ имеет пуассоновское распределение с интенсивностью $\Pi(A)$.*

2. Для любых измеримых непересекающихся $A \subset G$ и $B \subset G$ величины $N(A) = \#\left\{X \cap A\right\}$ и $N(B) = \#\left\{X \cap B\right\}$ независимы.

Доказательство. Докажем утверждение пункта 1. Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$\mathbf{P}(N(A)=m)=\sum_{k\geq m}\mathbf{P}(N(A)=m\mid\varkappa=k)\,\mathbf{P}(\varkappa=k).$$

В силу независимости случайных величин x_j имеем:

$$\mathbf{P}(N(A)=m\mid\varkappa=k)=\mathbf{P}(\#\left\{x_j\mid x_j\in A\right\}=m\mid\varkappa=k)=$$
$$=C_k^m\left(\frac{\Pi(A)}{\Pi(G)}\right)^m\left(\frac{\Pi(G\setminus A)}{\Pi(G)}\right)^{k-m}. \quad (1)$$

Принимая во внимание, что $\varkappa$ имеет пуассоновское распределение, получаем:

$$\mathbf{P}(N(A)=m)=\sum_{k\geq m}C_k^m\left(\frac{\Pi(A)}{\Pi(G)}\right)^m\left(\frac{\Pi(G\setminus A)}{\Pi(G)}\right)^{k-m}e^{-\Pi(G)}\,\frac{\Pi(G)^k}{k!}=$$
$$=\sum_{k\geq m}\frac{1}{m!\,(k-m)!}\,(\Pi(A))^m\,(\Pi(G\setminus A))^{k-m}\,e^{-\Pi(G)}=$$
$$=\sum_{i\geq 0}\frac{1}{m!\,i!}\,(\Pi(A))^m\,(\Pi(G\setminus A))^i\,e^{-\Pi(G)}=$$
$$=e^{-\Pi(G\setminus A)}\,e^{-\Pi(A)}\,\frac{\Pi(A)^m}{m!}\sum_{i\geq 0}\frac{\Pi(G\setminus A)^i}{i!}=e^{-\Pi(A)}\,\frac{\Pi(A)^m}{m!}. \quad (2)$$

Утверждение пункта 1 доказано, докажем утверждение пункта 2.

Снова используя формулу полной вероятности получаем:

$$\mathbf{P}(N(A)=m,N(B)=n)=$$
$$=\sum_{k\geq n+m}C_k^mC_{k-m}^n\left(\frac{\Pi(A)}{\Pi(G)}\right)^m\left(\frac{\Pi(B)}{\Pi(G)}\right)^n\left(\frac{\Pi((G\setminus A)\setminus B)}{\Pi(G)}\right)^{k-m-n}e^{-\Pi(G)}\frac{\Pi(G)^k}{k!}=$$
$$=e^{-\Pi(G)}\sum_{k\geq n+m}\frac{\Pi(A)^m}{m!}\frac{\Pi(B)^n}{n!}\frac{\Pi((G\setminus A)\setminus B)^{k-m-n}}{(k-m-n)!}=$$
$$=e^{-\Pi(A)}\frac{\Pi(A)^m}{m!}e^{-\Pi(B)}\frac{\Pi(B)^n}{n!}\sum_{i\geq 0}e^{-\Pi((G\setminus A)\setminus B)}\frac{\Pi((G\setminus A)\setminus B)^i}{i!}=$$
$$=e^{-\Pi(A)}\frac{\Pi(A)^m}{m!}e^{-\Pi(B)}\frac{\Pi(B)^n}{n!}=\mathbf{P}(N(A)=m)\,\mathbf{P}(N(B)=n). \quad (3)$$

Таким образом, мы показали независимость $N(A)$ и $N(B)$. $\square$

Пусть $f : G \to \mathbb{R}$ - измеримая суммируемая функция. Определим случайную величину ξ, полагая

$$\xi = \sum_{x \in X} f(x).$$

Случайную величину ξ, определённую таким образом, называют ещё стохастическим интегралом по точечному пуассоновскому полю.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *1.* $\mathbb{E}\xi = \int_G f(x) d\Pi$
2. $\mathbb{D}\xi = \int_G f(x)^2 d\Pi$
3. $f_\xi(p) = \mathbb{E}e^{ip\xi} = \exp\left(\int_G (e^{ipf(x)} - 1) d\Pi\right)$

Доказательство. 1. Найдём математическое ожидание ξ:

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\left(\sum_{x \in X} f(x)\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{\varkappa} f(x)\right)$$

Поскольку случайные величины x_k независимы и имеют общее распределение, а также не зависят от $\varkappa$, то продолжая, предыдущие выкладки, получим:

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{\varkappa} \frac{\int_G f(x) d\Pi}{\Pi(G)}\right) = \mathbb{E}\left(\varkappa \frac{\int_G f(x) d\Pi}{\Pi(G)}\right) = \frac{\int_G f(x) d\Pi}{\Pi(G)} \mathbb{E}\varkappa =$$
$$= \frac{\int_G f(x) d\Pi}{\Pi(G)} \Pi(G) = \int_G f(x) d\Pi \quad (4)$$

2. Найдём математическое ожидание ξ^2:

$$\mathbb{E}\xi^2 = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{\varkappa} f(x_k)\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{\varkappa} f^2(x_k) + 2\sum_{k=2}^{\varkappa}\sum_{j<k} f(x_k) f(x_j)\right) =$$
$$= \frac{\int_G f^2(x) d\Pi}{\Pi(G)} \mathbb{E}\varkappa + \frac{\left(\int_G f(x) d\Pi\right)^2}{(\Pi(G))^2} \mathbb{E}\varkappa(\varkappa - 1) =$$
$$= \int_G f^2(x) d\Pi + \left(\int_G f(x) d\Pi\right)^2 \quad (5)$$

Откуда получим, что $\mathbb{D}\xi = \int_G f^2(x) d\Pi$.

3. Наконец, найдём характеристическую функцию $f_\xi(p) = \mathbb{E}e^{ip\xi}$:

$$f_\xi(p) = \mathbb{E}e^{ip\xi} = \mathbb{E}\mathbb{E}\left(\exp\left(ip\sum_{k=1}^{\varkappa} f(x_k)\right) \mid \varkappa\right) = \mathbb{E}\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{s} e^{ipf(x_k)}\right)|_{s=\varkappa}$$

Поскольку x_k - независимые случайные величины, и функции независимых случайных величин - тоже независимые случайные величины, то:

$$f_\xi(p) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{\varkappa} \mathbb{E} e^{ipf(x_k)}\right) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{s} e^{ipf(x_k)} \mid \varkappa = s\right) \mathbf{P}(\varkappa = s) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\mathbb{E} e^{ipf(x_1)}\right)^s \mathbf{P}(\varkappa = s) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\int_G e^{ipf(x)} d\Pi\right)^s}{(\Pi(G))^s} e^{-\Pi(G)} \frac{(\Pi(G))^s}{s!} =$$

$$= \exp\left(\int_G e^{ipf(x)} d\Pi - \Pi(G)\right) = \exp\left(\int_G (e^{ipf(x)} - 1) d\Pi\right) \quad (6)$$

В итоге имеем:

$$\mathbb{E}\xi = \int_G f(x) d\Pi,\ \mathbb{D}\xi = \int_G f(x)^2 d\Pi,\ f_\xi(p) = \exp\left(\int_G (e^{ipf(x)} - 1) d\Pi\right).$$

$\square$

3. Безгранично делимые случайные величины

В этом параграфе мы покажем, что каждая безгранично делимая случайная величина представима в виде стохастического интеграла по точечному случайному полю. Рассмотрим частный случай вышеописанной конструкции, когда G имеет вид $\mathbb{R}$, а мера Π удовлетворяет одному из следующих условий:

$$\int_{\mathbb{R}} \min(1, |x|) d\Pi(dx) < \infty \quad (7)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \min(1, x^2) d\Pi(dx) < \infty \quad (8)$$

Через X обозначим пуассоновское случайное поле на $\mathbb{R}$ с интенсивностью Π.

Для каждого $\varepsilon > 0$ определим случайную величину

$$\xi_\varepsilon = \sum_{\substack{x \in X \\ |x| \geq \varepsilon}} x.$$

Представим величину ξ_ε в виде суммы

$$\xi_\varepsilon = \xi_\varepsilon^{(1)} + \xi^{(2)} = \sum_{\substack{\varepsilon \leq |x| \leq 1 \\ x \in X}} x + \sum_{\substack{|x| > 1 \\ x \in X}} x$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Если выполнено условие (7), то существует L_1-предел $\xi^{(1)} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \xi_\varepsilon^{(1)}$. Характеристическая функция $f_\xi(p)$ случайной величины $\xi = \xi^{(1)} + \xi^{(2)}$ имеет следующий вид:*

$$f_\xi(p) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}} (e^{ipx} - 1)\Pi(dx)\right)$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой 2.

Пусть $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < 1$. Рассмотрим

$$\mathbb{E}\left(|\xi_{\varepsilon_1^{(1)}} - \xi_{\varepsilon_2}^{(1)}|\right) = \mathbb{E}\left(|\sum_{\substack{x\in X\\ \varepsilon_1\le|x|\le 1}} x - \sum_{\substack{x\in X\\ \varepsilon_2\le|x|\le 1}} x|\right) =$$

$$\mathbb{E}\left(|\sum_{\substack{x\in X\\ \varepsilon_2\le|x|<\varepsilon_1}} x|\right) \le \mathbb{E}\left(\sum_{\substack{x\in X\\ \varepsilon_2\le|x|\le\varepsilon_1}} |x|\right) \tag{9}$$

С одной стороны, ограничение X на множество $A_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} = [-\varepsilon_1, -\varepsilon_2] \cup [\varepsilon_2, \varepsilon_1]$ является пуассоновским точечным полем. С другой стороны, $\Pi(A_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}) < \infty$, и следовательно, $\mathbb{E}\left(\sum\limits_{\substack{x\in X\\ \varepsilon_2\le|x|\le\varepsilon_1}} |x|\right) = \int_{A_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}} |x| d\Pi \le \int_{\mathbb{R}} \min(1,|x|) d\Pi < \infty$.

Тогда по теореме Леви о монотонной сходимости $\int_{A_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}} |x| d\Pi = \int_{\mathbb{R}} |x| \mathbf{1}_{A_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}} d\Pi \xrightarrow[\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}]{} 0$. Таким образом, получаем, что $\mathbb{E}\left(|\xi_{\varepsilon 1} - \xi_{\varepsilon_2}|\right) \xrightarrow[\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}]{} 0$, т.е. последовательность случайных величин ξ_ε фундаментальна. Поскольку пространство L_1 полно, то у любой фундаментальной последовательности существует предел.

Справедливость формулы для характеристической функции следует из утверждения 3 теоремы 2. $\square$

Посмотрим, что будет при выполнении более слабого условия (8). Заметим, что в этом случае $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \xi_\varepsilon$ не обязан существовать.

Из независимости значений пуассоновского поля на непересекающихся множествах следует, что случайные величины $\xi_\varepsilon^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ независимы.

Теорема 4. *Если выполнено условие (8), то существует L_2-предел $\tilde{\xi}^{(1)} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\xi_\varepsilon^{(1)} - \mathbb{E}\xi_\varepsilon^{(1)}\right)$. Характеристическая функция $f_\xi(p)$ случайной величины $\xi = \tilde{\xi}^{(1)} + \xi^{(2)}$ имеет следующий вид:*

$$f_\xi(p) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}} (e^{ipx} - 1 - ipx\mathbf{1}_{[-1,1]}(x))\Pi(dx)\right)$$

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < 1$. В силу пункта 2 теоремы 2 имеем

$$\mathbb{E}\left(\xi_{\varepsilon_1}^{(1)} - \mathbb{E}\xi_{\varepsilon_1}^{(1)} - \xi_{\varepsilon_2}^{(1)} + \mathbb{E}\xi_{\varepsilon_2}^{(1)}\right)^2 = \mathbb{E}\left(\xi_{\varepsilon_1}^{(1)} - \xi_{\varepsilon_2}^{(1)} - \mathbb{E}\left(\xi_{\varepsilon_2}^{(1)} - \xi_{\varepsilon_2}^{(1)}\right)\right)^2 =$$
$$= \mathbb{D}\left(\xi_{\varepsilon_1}^{(1)} - \xi_{\varepsilon_2}^{(1)}\right) = \mathbb{D}\left(\sum_{\substack{x\in X\\ \varepsilon_2\le|x|<\varepsilon_1}} x\right) = \int_A x^2 d\Pi \quad (10)$$

где $A_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} = [-\varepsilon_1, -\varepsilon_2]\cup[\varepsilon_2, \varepsilon_1]$. Пользуясь условием второго пункта, получаем:

$$\int_{A_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}} x^2 d\Pi = \int_{\mathbb{R}} x^2 \mathbf{1}_{A_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}} d\Pi < \int_{\mathbb{R}} \min(1, x^2) d\Pi$$

Следовательно, по теореме Леви о монотонной сходимости

$$\int_{A_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}} x^2 d\Pi \xrightarrow[\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}]{} 0$$

и $\mathbb{E}\left(\xi_{\varepsilon_1} - \mathbb{E}\xi_{\varepsilon_1} - \xi_{\varepsilon_2} + \mathbb{E}\xi_{\varepsilon_2}\right)^2 \xrightarrow[\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}]{} 0$. То есть последовательность $\xi_\varepsilon - \mathbb{E}\xi_\varepsilon$ фундаментальна. Так как пространство L_2 полно, то у любой фундаментальной последовательности существует предел.

Формула для характеристической функции следует из теоремы 3 и независимости случайных величин $\tilde{\xi}^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$. □

4. Однородные процессы с независимыми приращениями

В этом параграфе мы построим представление однородного процесса с независимыми приращениями в виде интеграла по точечному пуассоновскому полю. В этом случае в качестве множества G мы возьмём $\mathbb{R} \times [0, T]$ с мерой интенсивности $\Pi(dt, dx) = \Lambda(dx)dt$, где Λ - мера на $\mathbb{R}$ с особенностью в нуле, dt - мера Лебега на $[0, T]$. Относительно меры Λ мы предположим, что она удовлетворяет или условию (7) или более слабому условию (8).

Для каждого $\varepsilon > 0$ определим случайный процесс $\xi_\varepsilon(t)$ полагая

$$\xi_\varepsilon(t) = \sum_{\substack{\varepsilon\le|x|\\ 0<s<t\\ (s,x)\in X}} x.$$

Аналогично тому, как это было сделано выше, представим процесс $\xi_\varepsilon(t)$ в виде суммы двух процессов $\xi_\varepsilon^{(1)}(t)$ и $\xi^{(2)}(t)$, где

$$\xi_\varepsilon^{(1)}(t) = \sum_{\substack{\varepsilon\le|x|\le 1\\ 0<s<t\\ (s,x)\in X}} x,$$

$$\xi^{(2)}(t) = \sum_{\substack{|x|>1\\ 0<s<t\\ (s,x)\in X}} x$$

Теорема 5. *Если выполнено условие* $\int_{\mathbb{R}} \min(1,|x|)\Lambda(dx) < \infty$*, то существует* L_1 *предел* $\xi^{(1)}(t) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \xi_\varepsilon^{(1)}(t)$*. Характеристическая функция* $f(p)$ *случайной величины* $\xi(t) = \xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$ *равна*

$$f(p) = \exp\left(t\int_{\mathbb{R}} (e^{ipx}-1)\Lambda(dx)\right).$$

Доказательство. Существование L_1 предела доказывается аналогично тому, как это было сделано в теореме (3). Найдём выражение для характеристической функции.

Поскольку $\xi_\varepsilon^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ задаются стохастическим интегралом на непересекающихся множествах, то они независимы. Следовательно

$$\mathbb{E}e^{ip\xi_\varepsilon(t)} = \mathbb{E}\left(e^{ip\xi_\varepsilon^{(1)}} e^{ip\xi^{(2)}}\right) = \mathbb{E}e^{ip\xi_\varepsilon^{(1)}}\mathbb{E}e^{ip\xi^{(2)}}$$

Рассмотрим отдельно каждое из средних. С вероятностью 1 пуассоновское поле на множестве $B = (\mathbb{R}\setminus[-1,1])\times(0,t)$ имеет конечное число точек, так как $\int_B \Lambda(dx) < \infty$. Следовательно, характеристическая функция даётся формулой

$$\mathbb{E}e^{ip\xi^{(2)}} = \exp\left(\int_B (e^{ipx}-1)\Pi(dt,dx)\right).$$

Поскольку по x точки пуассоновского процесса накапливаются только к нулю, любое множество $A_\varepsilon = ([-1,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,1])\times(0,t)$ также содержит конечное число точек процесса и аналогично

$$\mathbb{E}e^{ip\xi_\varepsilon^{(1)}} = \exp\left(\int_{A_\varepsilon} (e^{ipx}-1)\Pi(dt,dx)\right)$$

Таким образом, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ во втором равенстве, получаем:

$$\mathbb{E}e^{ip\xi_\varepsilon(t)} = \mathbb{E}e^{ip\xi_\varepsilon^{(1)}}\mathbb{E}e^{ip\xi^{(2)}} =$$
$$= \exp\left(\int_{[-1,1]\times(0,t)}(e^{ipx}-1)\Pi(dt,dx)\right)\exp\left(\int_B(e^{ipx}-1)\Pi(dt,dx)\right) =$$
$$= \exp\left(\int_{\mathbb{R}\times(0,t)}(e^{ipx}-1)\Pi(dt,dx)\right) = \exp\left(t\int_{\mathbb{R}}(e^{ipx}-1)\Lambda(dx)\right) \tag{11}$$

□

Теорема 6. *Если выполнено условие* $\int_{\mathbb{R}}\min(1,x^2)\Lambda(dx) < \infty$*, то существует* L_2 *предел* $\tilde{\xi}^{(1)}(t) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\xi_\varepsilon^{(1)}(t) - \mathbb{E}\xi_\varepsilon^{(1)}(t))$*. Характеристическая функция* $f(p)$ *случайной величины* $\tilde{\xi}(t) = \tilde{\xi}^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$ *равна*

$$f(p) = \exp\left(t\int_{\mathbb{R}}(e^{ipx}-1-ipx\mathbf{1}_{[-1,1]})\Lambda(dx)\right).$$

Доказательство. Существование L_2 предела доказывается аналогично тому, как это было сделано в теореме (4). Найдём выражение для характеристической функции. Как и выше, имеем

$$\mathbb{E}e^{ip\xi^{(2)}(t)} = \exp\left(\int_{[0,t]\times(\mathbb{R}\setminus[-1,1])}(e^{ipx}-1)\Pi(dt,dx)\right) =$$
$$\exp\left(t\int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]}(e^{ipx}-1)\Lambda(dx)\right) \tag{12}$$

Поскольку по x точки пуассоновского процесса накапливаются только к нулю, любое множество $A_\varepsilon = ([-1,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,1])\times(0,t)$ также содержит конечное число точек процесса и, соответственно, получаем

$$\mathbb{E}e^{ip(\xi_\varepsilon^{(1)}-\mathbb{E}\xi_\varepsilon^{(1)}(t))} = \exp\left(\int_{A_\varepsilon}(e^{ipx}-1-ipx)\Pi(dt,dx)\right) =$$
$$\exp\left(\int_{[-1,1]\times(0,t)}(e^{ipx}-1-ipx)\mathbf{1}_{A_\varepsilon}\Pi(dt,dx)\right) \tag{13}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ получаем

$$\mathbb{E}e^{ip\tilde{\xi}^{(1)}} = \exp\left(\int_{[-1,1]\times(0,t)}(e^{ipx}-1-ipx)\Pi(dt,dx)\right)$$

Пользуясь независимостью случайных величин $\tilde{\xi}^{(1)}(t)$ и $\xi^{(2)}(t)$ получаем

$$\mathbb{E}e^{ip(\tilde{\xi}^{(1)}(t)+\xi^{(2)}(t))} = \mathbb{E}e^{ip\tilde{\xi}^{(1)}(t)}\mathbb{E}e^{ip\xi^{(2)}(t)} = \exp\left(t\int_{\mathbb{R}}(e^{ipx}-1-ipx\mathbf{1}_{[-1,1]})\Lambda(dx)\right) \quad (14)$$

□

5. Представление решений эволюционных уравнений

В этом параграфе мы покажем, что решение некоторых эволюционных уравнений могут быть представлены в виде математического ожидания функционала от однородного процесса с независимыми приращениями.

Пусть η случайная величина. С каждой случайной величиной мы можем связать псевдодифференциальный оператор Q_η определяемый формулой

$$Q_\eta\varphi(x) = \mathbb{E}\varphi(x+\eta).$$

Покажем, что символ этого псевдодифференциального оператора есть $f_\eta(-p)$, где f_η - характеристическая функция случайной величины η.

$$Q_\eta\varphi(x) = \mathbb{E}\varphi(x+\eta) = \mathbb{E}(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ip(x+\eta)}\hat{\varphi}(p)dp) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\hat{\varphi}(p)\mathbb{E}e^{-ip\eta}dp = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\hat{\varphi}(p)f_\eta(-p)dp \quad (15)$$

Пусть теперь $\eta(t)$ - процесс с независимыми приращениями, удовлетворяющий условию $\eta(0) = 0$. Для каждого $t \geq 0$ определим оператор P^t, полагая

$$P^t\varphi(x) = \mathbb{E}\varphi(x+\eta(t))$$

Теорема 7. *Семейство операторов P^t образует полугруппу.*

Доказательство. Свойство $P^0\varphi(x) = \varphi(x)$ очевидно. Покажем, что $P^{(t+s)} = P^tP^s$. Для этого рассмотрим поток $\sigma-$алгебр $\mathcal{F}_t = \sigma\{\eta(s), s \leq t\}$. Тогда

$$P^{(t+s)}\varphi(x) = \mathbb{E}\varphi(x+\eta(t+s)) = \mathbb{E}\varphi(x+\eta(t)+\eta(t+s)-\eta(t)) = \\ = \mathbb{E}\mathbb{E}(\varphi(x+\eta(t)+\eta(t+s)-\eta(t)) \mid \mathcal{F}_t) \quad (16)$$

Поскольку $\eta(t)$ и $\eta(t)-\eta(s)$ независимы, то

$$\mathbb{E}(\varphi(x+\eta(t)+\eta(t+s)-\eta(t)) \mid \eta(t)=y) = \\ = \mathbb{E}\varphi(x+y+\eta(t+s)-\eta(t)) = P^s\varphi(x+y) \quad (17)$$

Следовательно

$$P^{(t+s)}\varphi(x) = \mathbb{E}(P^s\varphi(x+\eta(t))) = P^tP^s\varphi(x)$$

□

Рассмотрим процесс с независимыми приращениями $\tilde{\xi}(t)$, спектральная мера Λ которого удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{R}} \min(1,x^2)\Lambda(dx) < \infty.$$

Через P^t обозначим порождённую им полугруппу операторов

$$P^t\varphi(x) = \mathbb{E}\varphi(x+\xi(t)).$$

Через P^t_ε обозначим полугруппу, порождённую аппроксимирующим процессом $\tilde{\xi}_\varepsilon(t) = \tilde{\xi}^{(1)}_\varepsilon(t) + \xi^{(2)}(t)$

$$P^t_\varepsilon\varphi(x) = \mathbb{E}\varphi(x+\tilde{\xi}_\varepsilon(t)).$$

Теорема 8. *Пусть $\varphi \in W^2_2(\mathbb{R})$, где $W^2_2(\mathbb{R})$ - пространство Соболева функций на $\mathbb{R}$, имеющих квадратично суммируемые производные до второго порядка. Тогда*

1. Генератор полугруппы P^t_ε имеет вид:

$$A_\varepsilon\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} (\varphi(x+y)-\varphi(x)-y\varphi'(x)\mathbf{1}_{[-1,1]}(y))\Lambda(dy)$$

2. Генератор полугруппы P^t имеет вид:

$$A\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} (\varphi(x+y)-\varphi(x)-y\varphi'(x)\mathbf{1}_{[-1,1]}(y))\Lambda(dy)$$

Доказательство. Докажем только утверждение пункта 1. Доказательство пункта 2 проводится аналогично.

Запишем функцию $\varphi(x)$ через преобразование Фурье:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\hat{\varphi}(p)dp$$

Действие полугруппы можно записать следующим образом:

$$P_\varepsilon^t\varphi(x) = \mathbb{E}(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ip(x+\xi_\varepsilon(t))}\hat{\varphi}(p)dp) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\hat{\varphi}(p)\mathbb{E}e^{-ip\xi_\varepsilon(t)}dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\hat{\varphi}(p)\exp\left(t\int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]}(e^{-ipy} - 1 + ipy\mathbf{1}_{[-1,1]})\Lambda(dy)\right)dp \tag{18}$$

То есть, полугруппа действует на функцию как умножение на экспоненту её Фурье-образа. Тогда действие генератора полугруппы A_ε легко найти дифференцированием по t при $t = 0$:

$$A_\varepsilon\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\hat{\varphi}(p)\int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]}(e^{-ipy} - 1 + ipy\mathbf{1}_{[-1,1]})\Lambda(dy)dp$$

$$A_\varepsilon\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]}\int_{\mathbb{R}}(\hat{\varphi}(p)e^{-ip(x+y)} - \hat{\varphi}(p)e^{-ipx} + \hat{\varphi}(p)\, ipy\mathbf{1}_{[-1,1]})\Lambda(dy)dp =$$

$$= \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]}(\varphi(x+y) - \varphi(x) - y\varphi'(x)\mathbf{1}_{[-1,1]}(y))\Lambda(dy) \tag{19}$$

□

Из теоремы 8 следует, что для $\varphi \in W_2^2$ функция

$$u(t,x) = \mathbb{E}\varphi(x + \tilde{\xi}(t)),$$

является решением задачи Коши для эволюционного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au,\ u(0,x) = \varphi(x).$$

Покажем теперь, что функция $u_\varepsilon(t,x) = \mathbb{E}\varphi(x + \tilde{\xi}_\varepsilon(t))$ является аппроксимацией в L_2 функции $u(t,x)$. Справедливо следующее утверждение

Теорема 9. *Существует такая постоянная $C > 0$, что выполнено неравенство*

$$\|P_\varepsilon^t\varphi - P^t\varphi\|_{L_2} \le Ct\gamma(\varepsilon)\|\varphi\|_{W_2^2},$$

где

$$\gamma(\varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} y^2\Lambda(dy) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

Доказательство. Выберем норму в пространстве Соболева эквивалентную стандартной $\|\varphi\|^2_{W_2^2} = \int_{\mathbb{R}}(1 + |p|^4)|\hat{\varphi}(p)|^2dp$. Воспользуемся формулой Дюамеля для разности операторных экспонент:

$$e^{(A+B)t} - e^{tA} = \int_0^t e^{(A+B)\tau}Be^{A(t-\tau)}d\tau$$

Если в качестве $A+B$ и A взять генераторы полугрупп P_ε^t и P^t соответственно, то получим:

$$P^t = e^{tA}, \quad P_\varepsilon^t = e^{t(A+B)}$$

и

$$\|P_\varepsilon^t\varphi(x) - P^t\varphi(x)\|_{L_2} = \| \int_0^t e^{(A+B)\tau} B e^{A(t-\tau)}\varphi(x)d\tau\|_{L_2} \leq$$
$$\leq \int_0^t \|e^{(A+B)\tau} B e^{A(t-\tau)}\varphi(x)d\tau\|_{L_2} \leq$$
$$\leq \int_0^t \|e^{(A+B)\tau}\|_{L_2\to L_2} \; \|B\|_{W_2^2\to L_2} \; \|e^{A(t-\tau)}\|_{W_2^2\to W_2^2} \; d\tau \; \|\varphi\|_{W_2^2} \quad (20)$$

Оценим в отдельности каждую норму:

$$\|e^{(A(t-\tau)}\varphi(x)\|^2_{W_2^2} = \|P^{t-\tau}\varphi(x)\|^2_{W_2^2} =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} (1+|p|^4)|\hat{\varphi}(p) \exp\left((t-\tau)\int_{\mathbb{R}} (e^{-ipy} - 1 + ipy\mathbf{1}_{[-1,1]})\Lambda(dy)\right)|^2 dp =$$
$$= \int (1+|p|^4)|\hat{\varphi}(p)|^2 \,|\exp\left((t-\tau)\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} (e^{-ipy} - 1 + ipy\mathbf{1}_{[-1,1]})\Lambda(dy)\right)|^2 dp \leq$$
$$\leq \|\varphi\|^2_{W_2^2} \quad (21)$$

Здесь был использован тот факт, что $\mathrm{Re}(e^{-ipy} - 1 + ipy\mathbf{1}_{[-1,1]}) \leq 0$. Таким образом, $\|e^{A(t-\tau)}\|_{W_2^2\to W_2^2} \leq 1$. Аналогично можно показать, что $\|e^{(A+B)\tau}\|_{L_2\to L_2} \leq 1$. Осталось найти норму B.

$$B\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\hat{\varphi}(p)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (e^{-ipy} - 1 + ipy\mathbf{1}_{[-1,1]})\Lambda(dy)dp$$

Поскольку преобразование Фурье изометрично в L_2, то

$$\|B\varphi\|^2_{L_2} = \|\hat{\varphi}(p)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (e^{-ipy} - 1 + ipy\mathbf{1}_{[-1,1]})\Lambda(dy)\|^2_{L_2} =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(p)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (e^{-ipy} - 1 + ipy\mathbf{1}_{[-1,1]})\Lambda(dy)|^2 dp \quad (22)$$

Считая, что $|\varepsilon| < 1$ мы можем откинуть индикатор под интегралом:

$$\|B\varphi\|^2_{L_2} = \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(p)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (e^{-ipy} - 1 + ipy)\Lambda(dy)|^2 dp \leq$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}} p^4|\varphi(p)|^2 \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} y^2\Lambda(dy)\right)^2 dp \leq \gamma^2(\varepsilon)\|\varphi\|^2_{W_2^2} \quad (23)$$

Здесь было использованно неравенство $e^{-ipy} - 1 + ipy \leq p^2y^2$. Когда оценки на все три нормы получены, мы можем написать:

$$\|P_\varepsilon^t\varphi(x) - P^t\varphi(x)\|_{L_2} \leq \int_0^t \gamma(\varepsilon)\|\varphi\|_{W_2^2}d\tau = t\gamma(\varepsilon)\|\varphi\|_{W_2^2}$$

$\square$

Список литературы

[1] А.Д.Вентцель, *Курс теории случайных процессов.* 2-е изд.,доп. – М.: Наука, Физматлит, 1996. – 400 с.

[2] Дж.Кингман, *Пуассоновские процессы* // Под ред. А.М.Вершика. – М.: МЦНМО, 2007. – 136 с.

[3] И.А.Ибрагимов, Ю.В.Линник, *Независимые и стационарно связанные величины.* – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965. – 524 с.

[4] В.В.Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 320 с.

[5] И.И.Гихман, А.В.Скороход, *Введение в теорию случайных процессов : учебное пособие для студентов физ.-мат. специальностей вузов.* 2-е изд. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. – 567 с.